第 40 講　総合問題(8)

1 ［1］　12 は $12=3+4+5$ と連続する 3 つの自然数の和として表すことができる．88 を連続する 2 つ以上の自然数の和として表せ．

［2］　自然数 1，2，3，……，n から異なる 2 つを選ぶすべての組合せについて，2 数の差の 2 乗をたし合わせたものを S_n とする．例えば

$S_3=(1-2)^2+(1-3)^2+(2-3)^2=6$　である．

次の問いに答えよ．

(1)　$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$　を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$　を n で表せ．

(2)　S_n を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　n は 2 以上の自然数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 関係式　$a_1=0,\ \dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=2n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

により定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$　に対して　$b_k=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}\left(1-\sqrt{a_{k+1}}\right)$

とおく．このとき，すべての n に対して　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k<\sqrt{2}-1$　が成り立つことを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 40 講　総合問題(8)

等差数列 1，2，3，……，20 がある．

(1)　異なる 2 項の積の総和は **アイウエオ** である．

(2)　p，q を異なる項とするとき，$p \times q^2$ の総和は **カキクケコサ** である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第40講　総合問題(8)

1 [1]　12は $12=3+4+5$ と連続する3つの自然数の和として表すことができる．88を連続する2つ以上の自然数の和として表せ．

連続する n 個の自然数（$n\geqq2$）を　$m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots\cdots,\ m+n-1$　とする　（$m\geqq1$）

これらの和は　$\dfrac{1}{2}n\{m+(m+n-1)\}=\dfrac{1}{2}n(2m+n-1)$　　これが88になるとき

$$n(2m+n-1)=176=2^4\times11$$

$n,\ 2m+n-1$ は自然数．　また　$(2m+n-1)-n=2m-1>0$　より $n<2m+n-1$

$2m+n-1$ と n の差が奇数であることから，$n,\ 2m+n-1$ は偶奇を異にする．

よって　$(n,\ 2m+n-1)=(11,\ 2^4)$　のみ

したがって　$n=11,\ m=3$　　ゆえに　**$88=3+4+5+\cdots\cdots+13$（11個の和）**

1 [2]　自然数 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ から異なる2つを選ぶすべての組合せについて，2数の差の2乗をたし合わせたものを S_n とする．例えば

$S_3=(1-2)^2+(1-3)^2+(2-3)^2=6$　である．

次の問いに答えよ．

(1)　$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$　を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$　を n で表せ．

(2)　S_n を求めよ．

(1)　$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^4-k^4\}=-4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$(\text{左辺})=(0^4-1^4)+(1^4-2^4)+(2^4-3^4)+\cdots\cdots+\{(n-1)^4-n^4\}=-n^4$　より

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^4+2n^3+n^2=n^2(n+1)^2$$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$　$\left(=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\right)$

(2)　$1\sim n$　から選んだ2数の差が k となる組合せは

$(1,\ 1+k),\ (2,\ 2+k),\ \cdots\cdots,\ (n-k,\ n)$　の $n-k$ 個

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\times(n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}(-k^3+nk^2)=-\frac{1}{4}(n-1)^2n^2+n\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$$=\frac{1}{12}(n-1)n^2\{-3(n-1)+2(2n-1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{12}(n-1)n^2(n+1)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \cdots\cdots + na_1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　n は 2 以上の自然数とする．このとき，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \cdots\cdots + na_1 \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1} = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots\cdots + (n-1)a_1 \quad \cdots\cdots②$$

①－②より

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n - \frac{(n-1)n}{2}b_{n-1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots\cdots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

したがって　$n \geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}b_n - \frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}}$

(2)　$b_n = p + (n-1)q$　より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}\{p+(n-1)q\} - \frac{(n-1)n}{2}\{p+(n-2)q\}$$

$$= \frac{3}{2}qn^2 + \left(p - \frac{3}{2}q\right)n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots\cdots③$$

①で $n=1$ のとき　$b_1 = a_1$　　よって　$a_1 = p$

③で $n=1$ とすると　$a_1 = \frac{3}{2}q + p - \frac{3}{2}q = p$　　よって　③は $n=1$ のときも成立する．

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \left\{\frac{3}{2}qn^2 + \left(p - \frac{3}{2}q\right)n\right\} - \left\{\frac{3}{2}q(n-1)^2 + \left(p - \frac{3}{2}q\right)(n-1)\right\}$$

$= p + 3q(n-1)$　　これは $n=1$ のときも成立する．

したがって　$\boldsymbol{a_n = p + 3q(n-1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 関係式　$a_1=0,\ \dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=2n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

により定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$　に対して　$b_k=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}(1-\sqrt{a_{k+1}})$

とおく．このとき，すべての n に対して　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k<\sqrt{2}-1$　が成り立つことを示せ．

(1) $\dfrac{1}{1-a_n}=c_n$　とおくと　$c_1=\dfrac{1}{1-a_1}=1$

$c_{n+1}-c_n=2n+1,\ c_1=1$

$n\geqq2$ のとき　$\displaystyle c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$=1+2\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=n^2$　（$n=1$ のときも成立）

よって　$c_n=n^2$　　つまり　$\dfrac{1}{1-a_n}=n^2$　より　$\boldsymbol{a_n=1-\dfrac{1}{n^2}}$

(2) $b_k=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}\left\{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{(k+1)^2}}\right\}=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}\left\{1-\dfrac{\sqrt{k(k+2)}}{k+1}\right\}$

$=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}-\sqrt{\dfrac{k+2}{k+1}}$　より

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)$

$=\sqrt{2}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}$

n は自然数より　$\dfrac{1}{n+1}>0$　つまり $\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}>\sqrt{1}=1$

よって　$\sqrt{2}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}<\sqrt{2}-1$

したがってすべての自然数 n で　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k<\sqrt{2}-1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第40講　総合問題(8)

等差数列 1，2，3，……，20 がある．

(1)　異なる 2 項の積の総和は **アイウエオ** である．

(2)　p，q を異なる項とするとき，$p\times q^2$ の総和は **カキクケコサ** である．

(1)　異なる 2 項を p，q（$p<q$）とする．

$q=k$（$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 20$）のとき，$p$ は 1 から $k-1$ の $k-1$ 通りある．

よって　$q=k$ のときの積 pq の総和は

$$pq=\{1+2+3+\cdots\cdots+(k-1)\}\cdot k=\frac{1}{2}(k-1)k\cdot k=\frac{1}{2}(k^3-k^2)$$

したがって求める総和は

$$\sum_{k=2}^{20}\frac{1}{2}(k^3-k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^3-k^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}\cdot 20^2\cdot 21^2-\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(44100-2870)=\mathbf{20615}$$

（別解）　求める総和を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+20)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2)\}$$　（以下略）

(2)　異なる 2 項 p，q について，

$q=k$（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 20$）のとき，$p$ は 1 から 20 のうち，k と異なる数である．

よって　$q=k$ のときの積 pq^2 の総和は

$$pq^2=\{(1+2+3+\cdots\cdots+20)-k\}\cdot k^2=(210-k)k^2=210k^2-k^3$$

したがって求める総和は

$$\sum_{k=1}^{20}(210k^2-k^3)=210\cdot 2870-44100=\mathbf{558600}$$

（別解）　求める総和を T とおくと

$$T=(1+2+3+\cdots\cdots+20)(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2)-(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+20^3)$$

（以下略）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。